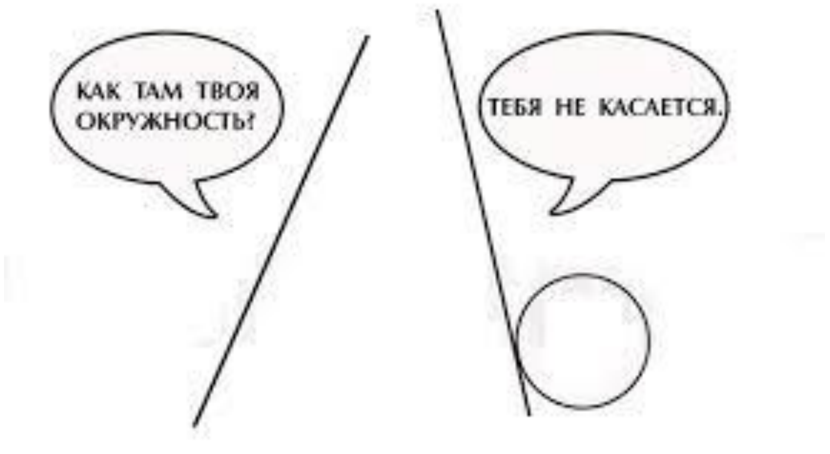
Задачник

«Дострой меня!»

Для тех, кто влюблён*



*В математику

Вместо предисловия, вступления и прочей обязательной ерунды.

Уважаемый читатель! Сейчас в Ваших руках находится небольшой задачник. Он не совсем настоящий и не совсем игрушечный. Почему? Судите сами. Задачи собраны самые, что ни на есть содержательные. Некоторые из них, страшно подумать, даже предлагались на вступительных испытаниях в ведущие ВУЗы Санкт-Петербурга и его окрестностей. Как и в любом настоящем задачнике, здесь есть условия задач и ответы.

Почему игрушечный? Прежде всего, потому, что автор этого текста искренне считает большинство задачников страшными и занудными. И поэтому, вполне логично, что он постарался хоть немного «раскрасить» свое творчество, надеясь, что это поспособствует меньшей закрепощенности и хорошему настроению при решении задач. Что для этого было сделано – листайте дальше, сами увидите!

А я пока кратко (ибо уже чувствую, как Ваша рука занесена для того, чтобы перелистнуть, наконец, эту страницу!) остановлюсь на структуре сего творения. Сразу за этой страницей Вас ждет то, ради чего все и писалось: задачи! Их будет не очень много, зато здесь собрано, как мне кажется, немало красивых идей, связанных с дополнительными построениями.

Затем приведены небольшие подсказки-намеки. Их будет небезынтересно прочитать даже в том случае, если задача решится: возможно, когда-нибудь Вы захотите научить кого-то другого решать такие задачи, а тут Вы сможете прочитать некоторые способы весьма ненавязчиво натолкнуть учащегося на нужное озарение.

Наконец, дальше записаны ответы. Куда ж без них. И чтобы не заканчивать на такой банальной ноте, в конце, в качестве бонуса, Вас ждет небольшое саммари, которое может помочь упорядочить Ваши знания и навыки при решении подобных задач.

И последнее. Хоть задачник и озаглавлен «Дополнительные построения», конечно, каждую задачу можно решить и без них. Но мне кажется, что решать подобные задачи «в лоб» - все равно, что есть мясо без соуса: можно, конечно, но до чего же это пресно!

Приятного Вам геометрического аппетита!

Автор

Задачи

1. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведенная к третьей, равна 5. Найти площадь треугольника.
2. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC (AB = BC) пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если CP = 5, PE = 2.
3. Найти высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания – 4 и 14.
4. Внутри треугольника ABC взята точка M, причем расстояния от этой точки до сторон AC и BC равны 2 и 4 соответственно. Найти расстояние от M до AB, если AB = 10, BC = 17, AC = 21.
5. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка P, причем PC = AC. K – середина AB. В каком отношении PK делит BC?
6. Дан параллелограмм ABCD, точка M – середина BC, K – середина AB. В каком отношении отрезок AM делит отрезок KD?
7. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении BD:DC = 2:1. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?
8. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) провели биссектрису AD. Известно, что AC = BD. Докажите, что AC = AD.
9. Дан прямоугольник ABCD. На диагонали AC отметили точки K и M (K лежит между M и A) так, что AB = AK, BC = AM. Из точек M и K опустили перпендикуляры MP и KT соответственно на сторону AB. Докажите, что AT + PM = AC.
10. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3. Найдите острые углы треугольника.
11. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30^o и 60^o. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.
12. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найти площадь трапеции.
13. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB равен 75^o. Найти площадь треугольника ABC.
14. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма ABCD как на диаметре, проходит через вершину B этого параллелограмма и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.

15. Прямая имеет с параллелограммом ABCD единственную общую точку B. Вершина A и C удалены от этой прямой на расстояния 4 и 6 соответственно. На какое расстояние удалена от этой прямой точка D?
16. Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата, если катеты треугольника равны a и b.
17. В выпуклом четырехугольнике ABCD отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найти угол, образованный продолжением сторон AB и CD.
18. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали – 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?
19. Трапеция с высотой h вписана в окружность. Боковая сторона видна из центра окружности под углом 120°. Найти среднюю линию трапеции.
20. Основание AB трапеции ABCD вдвое больше основания CD и вдвое больше боковой стороны AD. Диагональ AC равна a, а боковая сторона BC равна b. Найдите площадь трапеции.
21. В трапеции ABCD (AD || BC) угол ADB в два раза меньше угла ACB. Известно, что BC = AC = 5, AD = 6. Найти площадь трапеции.
22. Центры двух окружностей находятся на расстоянии 50 друг от друга, а их радиусы – 27 и 13. Найти длины их общих касательных.
23. Диагональ BD трапеции ABCD равна m, а боковая сторона AD равна n. Найти основание CD, если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины C, равны между собой.
24. Точки M, K, N, L – середины сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника ABCDE соответственно. P и Q – середины MN и KL соответственно. Известно, что PQ = 1. Найти AE.

На помощь!

Не решается какая-то задача из приведенных выше? Ничего страшного, и вот Вам мой совет: помучайтесь еще. Помучались? Тогда еще немного! Радость собственного озарения покроет все временные затраты!

Впрочем, если уж совсем тяжко – так, что просто руки опускаются, вот небольшие идеи-подсказки, которые направят Вас в нужном направлении. Уверен, даже если по началу придется кое-что почитать из этого раздела, это поможет не обращаться к нему в дальнейшем. Так что, вперед! И удачно Вам довести сложную задачу до конца!

1. Может, покажется это странным,
   Все же, мой друг, усвой:
   Если в условии есть медиана –
   Срочно ее удвой!

2. Тот случай, когда в первой подсказке все уже сказано…

3. Можно, конечно, записать кучу теорем Пифагора, но стоит ли? Не лучше ли перенести одну боковую сторону к другой и внимательно посмотреть на дело рук своих?

4. Даны все три стороны треугольника. Что мы можем найти с их помощью? Кстати, даны еще какие-то расстояния – читай, высоты! О чем же это нам говорит? Конечно, на рисунке не хватает трех отрезков!

5. Отношения. Где же это бывает? Уж не в подобии ли треугольников? Но позвольте, где ж тут подобные треугольники? Правильно, пока нет. Но это уже наша забота, правда?

   Не придумалось? Ок. А что если провести через B прямую, параллельную AC и продлить PK до пересечения с ней? Чем-то напоминает удвоение медианы, кстати. Все в этом мире тесно связано!

6. И снова про отношения. Значит снова подобие. Ну, теперь-то мы знаем (решив задачу 5), что надо что-то достроить и все получится. И ведь получится же!

7. Даже стыдно что-то писать: здесь из двух разных соображений понятно, что надо продлевать медиану. Во-первых, нужны подобные треугольники, а во-

вторых, это же медиана! Она чувствует себя неуютно и очень комплексует, не будучи продленной на свою длину!

8. А вот и еще одно классическое дополнительное построение. Если есть биссектриса – очень полезно бывает провести через ее конец линию, параллельную основанию. Зачем? Сами увидите!

   И кстати, как вообще использовать равенство каких-то отрезков? Тут варианта, по сути, два: или сделать равнобедренный треугольник, или найти равенство треугольников…

9. Очень красивая задача! Итак, нам надо доказать, что сумма двух отрезков равна третьему. Как это сделать? Есть два стандартных варианта. Первый: отложить на одной прямой от одного из меньших отрезков другой и доказать, что полученная сумма будет равна большему отрезку. Второй вариант: отложить один из меньших отрезков на большем и доказать, что оставшаяся часть большего отрезка в точности равна второму меньшему отрезку. Пока хватит, если не очень помогло – читайте дальше.

   Далее, что вообще за отрезки нам даны? AT и PM – это катеты каких-то прямоугольных треугольников. А кто является гипотенузами этих треугольников? AK и AM, то есть отрезки, равные сторонам прямоугольника. А что если сделать дополнительное построение, которое как раз и сделает прямоугольные треугольники со сторонами прямоугольника в качестве гипотенуз?

10. А вот и еще одна стандартная идея: если что-то сказано про прямоугольный треугольник, имеет смысл посмотреть на середину его гипотенузы. А если еще вспомнить, что какая-то медиана равна чьей-то половине…

11. Посмотрим внимательно на условие. 30 и 60, 30 и 60… Замечательные углы, в сумме дают 90! А не сделать ли какой-нибудь параллельный перенос так, чтобы эти углы попали в один треугольник?

12. Диагонали перпендикулярны. А что, если это использовать? Например, сделать перенос диагонали так, чтобы составился прямоугольный треугольник.

13. Прямоугольный треугольник. Медиана равна половине гипотенузы… Кстати, а середина гипотенузы – это ж середина хорды окружности – была какая-то теорема насчет середины хорды. Что бы такое провести?

14. Во-первых, раз не даны ни углы, ни стороны, это намек на какой-нибудь треугольник, углы которого ищутся из общих соображений. Например, прямоугольный, гипотенуза которого вдвое больше катета. Или?.. И еще. Если дана окружность, иногда бывает очень полезно отметить ее центр и провести радиусы!

15. Напрашивается, конечно, провести три перпендикуляра на эту прямую: АК, СО и DM. Нет ли гипотезы насчет того, чему же равен DM? Если все еще нет идей, читайте дальше

    А давайте теперь отложим на DM точку К так, что АР = КМ. Сейчас будет красиво!

16. А вот отличная задача на общегеометрическую эрудицию! Скажите, нигде ли Вы не встречали квадрат, построенный вне прямоугольного треугольника? Встречали? Тогда срочно дорисуйте картинку, до той, которая была в том доказательстве – и все получится!

17. Вот еще одна задача на эрудицию и ассоциативное мышление. Даны отрезки, соединяющие какие-то середины. На что это намек? Нет ли какой-нибудь похожей теоремы? Конечно, Вариньон! Освежите в памяти эту теорему – особенно, ее доказательство – и проблемы с этой задачей исчезнут!

18. А вот и еще одно железное правило, почти как с удвоением медианы: видишь в условии диагонали трапеции – перенеси одну из них параллельно к другой (чтобы они выходили из одной точки)!

19. Во-первых, полезно вспомнить, какую трапецию можно вписать в окружность. Далее, возможно, Вы знаете что-нибудь про среднюю линию равнобедренной трапеции. Не знаете? Не беда, едем дальше. Нам дан угол, под которым видна сторона из центра. А как называется такой угол? И нет ли каких-нибудь теорем, с ним связанных?

20. Так-так, надо найти площадь, а даны только два отрезка, углов нету… Может, какой-нибудь угол найдется автоматически? И еще, кто-то один вдвое больше, чем кто-то другой. А не отметить ли нам середину того, кто побольше? Куча равных отрезков получится…

21. Один угол вдвое меньше другого. Где мы это встречали? И потом, какие-то отрезки равны. Ну конечно, это же намек на…

22. На, когда речь идет об общей внешней касательной, то все понятно: получили прямоугольную трапецию, в которой все посчитали. А вот с внутренней касательной все не так просто. Можно, конечно, подобием, но числа там – врагу не пожелаю – а уж Вам, уважаемый читатель… Впрочем, может, попробовать сделать все по аналогии с первым случаем, сделав соответствующее дополнительное построение?

23. Три равных отрезка, выходящих их одной точки. Иначе говоря, вершины трапеции находятся на одинаковом расстоянии от С. Равноудалены. На что это намек? Далее, у нас есть два отрезка. А не сделать ли еще дополнительное построение, перенеся их друг к другу так, чтобы между ними получился хороший угол?

24. Задача – смертельный номер. Во-первых, нарисуйте большую красивую картинку. Во-вторых, в задаче есть куча всяких середин. На что это намек? Конечно, на средние линии, и на Вариньона. Но для Вариньона нет четырехугольника… Ок, так давайте его организуем…

    Проведем AD и отметим O – середину AD. Дальше – главное, не запутаться в рисунке.

Ответы

1. 48
2. $\frac{245}{8}$
3. 4,8
4. $\frac{29}{5}$
5. 2:1 от B
6. 4:1 от D.
7. 3:1 от A.
8. –
9. –
10. 30 и 60.
11. 8, 2, 3.
12. $9\sqrt{5}$
13. 40
14. 60 и 120.
15. 10
16. $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$
17. 90
18. 120
19. $\frac{h}{\sqrt{3}}$
20. $\frac{3}{4}ab$
21. 22
22. 48 и 30
23. $\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$
24. 4

А напоследок я скажу…

Ну как, понравилось? Наверняка понравилось. Один классик как-то сравнил басни Лафонтена с корзиной, полной прекрасных спелых вишен: ты наслаждаешься ими, а потом вдруг замечаешь, что корзина опустела. В этом задачнике собраны те самые «вишенки», которые, надеюсь, принесли удовлетворение настоящему ценителю геометрии, которым, уверен, являетесь Вы, о читатель.

В чем же здесь секрет? Откуда берется это ни с чем не сравнимое удовольствие от найденного красивого дополнительного построения, которое моментально решило сложную на первый взгляд задачу? Наверное, дело в том, что в каждой такой задаче мы испытываем радость озарения – это же сродни новому открытию или изобретению! С радостью озарения вообще мало что может сравниться. И тогда встает вопрос: а как же «спровоцировать» себя на озарение?

Проще всего было бы сказать, что озарение – штука эмоциональная, и нечего соваться с грубой логикой в тонкие сверхъестественные процессы. Озаряет – и ладно. Но Вашему автору (иногда даже слишком часто) хочется понять, почему так происходит, попробовать разобраться в природе озарений. И вот к какому выводу я пришел.

Да, озарение – это порыв, Божественное вмешательство, если хотите. Но это не значит, что озарение нельзя «вызвать». Каждый может если не гарантировать себе озарение, то хотя бы повысить вероятность того, что это произойдет. Как именно? Для этого нужно несколько компонентов.

Во-первых, конечно, знание теории. Скажем, в игре «Что? Где? Когда?» можно хоть час думать над вопросом

> *Всего в этом списке более 3700 человек. Среди них — один слепой, один человек с искусственной ногой, 13-летний мальчик из США, 73-летняя японка и 76-летний непалец. Всем им удалось... Что именно сделать?*

и так ничего и не придумать, если не знать, что именно в стране Непал (выделяется из списка, не так ли?) находится вершина Эверест. Так и в геометрии, если не знать формулы Герона, то задачу, в которой дан треугольник с тремя заданными сторонами, решить трудно. Аналогично, в некоторых задачах мы пользовались весьма нечастым гостем школьных тетрадей – теоремой Вариньона. Так что без теории – никуда.

Во-вторых, нельзя обойтись и без знания стандартных методов и идей. То есть речь не о теоремах и формулах, а о идеях, вроде удвоения медианы, параллельного переноса диагонали в трапеции и т.д. Как можно узнать все эти методы? Только решая задачи, конечно! Практика и еще раз практика.

И наконец, еще одно. Очень важно воспитывать в себе вкус. Да-да, вкус бывает не только литературным или музыкальным, но и геометрическим! Конечно, задачу 24 можно решить и векторами, а задачу 9 – синусами. Но большого удовлетворения Вы при этом не испытаете.

Предположим, Вам нужно убрать свой письменный стол. Вы можете просто скинуть все под стол, накрыть пледом и сказать, что проблема решена. А можете подумать немного, решить, что для структурирования всех бумажек на столе Вам необходимы папки с файликами, купить их, все аккуратно разложить. И там, и там есть результат, задача решена, но разница, полагаю, очевидна. Так что старайтесь искать красивые решения задач, даже если уже нашли «лобовое», вроде синусов или координатного метода.

Что ж, все хорошее когда-нибудь заканчивается, и этот задачник – не исключение. Любите геометрию! До встречи на страницах второго, дополненного издания!

P.S. И совсем уж напоследок, немного о себе.